



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**POSOUZENÍ PŘESNOSTI ŽURAVSKÉHO VZTAHU PRO
SMYKOVÁ NAPĚTÍ U VYBRANÝCH TVARŮ NOSNÍKŮ**

EVALUATION OF ACCURACY OF SHEAR FORMULA FOR CHOSEN SHAPES OF BEAMS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jan Bolcek

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

BRNO 2019

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Jan Bolcek**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.**
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Posouzení přesnosti Žuravského vztahu pro smyková napětí u vybraných tvarů nosníků

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Vliv smykových napětí se projevuje významně jen u krátkých nosníků, pro jejich výpočet se používá Žuravského vztah. Jeho předpoklady, stejně jako obecné předpoklady teorie prutů, však nelze v praxi přesně splnit, takže výsledky mohou být zatíženy významnou chybou. Úkolem je vyhodnotit významnost této chyby porovnáním analytického výpočtu s modelem vytvořeným a vyřešeným v programu využívajícím metodu konečných prvků.

Cíle bakalářské práce:

- Provést literární rešerši nepřesností při používání Žuravského vztahu.
- Pro vybraný tvar příčného průřezu provést analytický výpočet rozložení smykových napětí v průřezu u krátkého nosníku.
- V programu využívajícím metodu konečných prvků vytvořit výpočtový model zvoleného nosníku a porovnat vypočtené rozložení napětí pro různé okrajové podmínky, a to jednak reálné, jednak vycházející z prutových předpokladů.
- Zhodnotit dopad možné nepřesnosti Žuravského vztahu v řešeném případě.

Seznam doporučené literatury:

JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA J., BURŠA, J.: Mechanika těles, Pružnost a pevnost I, skriptum VUT Brno, CERM, Brno 2004.

JANÍČEK, P., FLORIAN, Z.: Mechanika těles, Úlohy z pružnosti a pevnosti I, skriptum VUT Brno, CERM, Brno.

ABSTRAKT

Tato práce se zabývá posouzením přesnosti Žuravského vztahu u krátkých nosníků. V teoretické části jsou formulovány předpoklady na základě, kterých je Žuravský vztah odvozen a následně je uveden postup pro jeho odvození. Dále je zde uvedena rešerše nepřesností, kterých se dopouštíme při používání Žuravského vztahu. Přesnost Žuravského vztahu je posouzena na příkladu prostě podepřeného nosníku zatíženého silou uprostřed s příčným průřezem tvaru I, pro který je nejprve proveden analytický výpočet rozložení smykových napětí a následně je porovnán s výpočtem pomocí metody konečných prvků. Metodou konečných prvků jsou nasimulovány 3 modely nosníků s různými okrajovými podmínkami a to jednak těmi, které vyplývají z prutových předpokladů a těmi reálnými. Na závěr jsou výsledky obou typů výpočtu porovnány a vyhodnoceny.

KLÍČOVÁ SLOVA

Žuravského vztah, smykové napětí, krátké nosníky, metoda konečných prvků, příčné průřezy, prostě podepřený nosník

ABSTRACT

This bachelor thesis pursues the judgement of accuracy of Jourawski's formula in short beams. Assumptions, on which is Jourawski's formula derived, are described in the theoretical part, there is also a procedure how to derive the formula. In the theoretical part is also stated a literature search on inaccuracies which are made by using Jourawski's formula. The accuracy of Jourawski's formula is judged by example of simply supported beam loaded with force in the middle and with cross section in the shape I. Firstly there is analytic calculation of distribution of shear stress which is then compared with calculation acquired by finite element method. By the finite element method are simulated three models of beams with different edge conditions, which are those derived from rod assumptions and the real ones. In the conclusion are compared and evaluated results from both types of calculations.

KEYWORDS

Jourawski's formula, shear stress, short beams, finite element method, cross section, simply supported beam

BOLCEK, Jan. *Posouzení přesnosti Žuravského vztahu pro smyková napětí u vybraných tvarů nosníků* [online]. Brno, 2019[cit. 2019-05-23]. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/116931>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce: prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma „Posouzení přesnosti Žuravského vztahu pro smyková napětí u vybraných tvarů nosníků“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno

.....

Jan Bolcek

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych tímto chtěl moc poděkovat, vedoucímu mé bakalářské práce, panu prof. Ing. Jířímu Buršovi, Ph.D. za věnovaný čas, ochotu, trpělivost a vstřícnost při konzultacích.

Brno

.....

Jan Bolcek

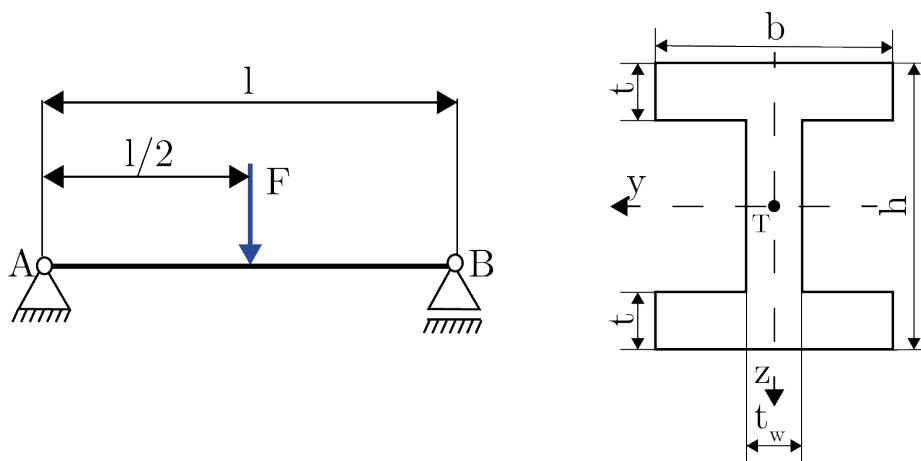
Obsah

1	Úvod	15
2	Teoretická část	17
2.1	Smykové napětí při ohybu	17
2.1.1	Nepřesnosti Žuravského vztahu	19
2.2	Alternativní teorie ohybu	22
2.2.1	Timošenkova nosníková teorie	23
2.2.2	Levinsonova nosníková teorie	24
3	Výpočetní část	27
3.1	Analytický výpočet	27
3.1.1	Výpočet reakcí ve vazbách	27
3.1.2	Geometrické charakteristiky příčného průřezu	28
3.1.3	Výpočet zatížení a délky nosníku	30
3.1.4	Rozložení smykových napětí po výšce průřezu	32
3.1.5	Potenciálně nebezpečné místo na průřezu	33
3.2	Numerický výpočet pomocí MKP	35
3.2.1	Charakteristika prvku SOLID186	35
3.2.2	Model nosníku a vytvoření konečnoprvkové sítě	35
3.2.3	Nastavení délky nosníku	35
3.2.4	Nastavení zatížení a okrajových podmínek	36
3.2.5	Rozložení smykových napětí	38
3.2.6	Posouzení hustoty konečnoprvkové sítě	43
4	Vyhodnocení výsledků	45
5	Závěr	47
	Literatura	49
	Seznam symbolů, veličin a zkratk	55

1 Úvod

Při ohybu vzniká v nosníku normálové napětí σ a pokud je nenulová posouvající síla, tak i smyková napětí τ . Vliv maximálních smykových napětí při ohybu je obvykle tak malý, že jej můžeme při výpočtu bezpečnosti zanedbat (významný vliv má však u krátkých nosníků). Přesný výpočet smykových napětí na základě diferenciálních rovnic pružnosti je složitý a pro praxi se tolik nevyužívá, proto se pro zjednodušení výpočtů zavádí celá řada přibližných předpokladů, na základě kterých odvodil roku 1856 D. J. Žuravski přibližný vztah pro výpočet smykových napětí při ohybu, který podle něj nese jméno *Žuravského vztah* [1].

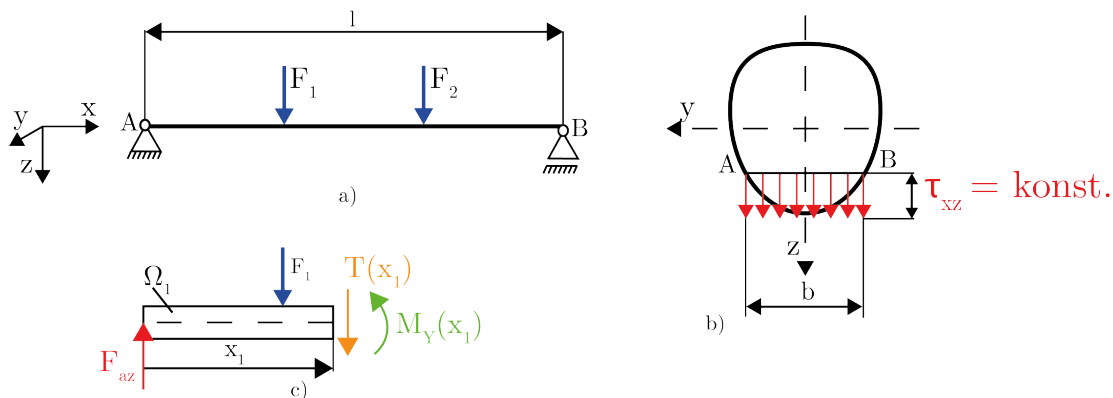
Cílem této bakalářské práce je provést rešerši nepřesností, kterých se dopouštíme při používání Žuravského vztahu, následně pomocí tohoto vztahu provést analytický výpočet rozložení smykových napětí u nosníků namáhaného na ohyb s různými příčnými průřezy a tyto výsledky porovnat s výsledky dosaženými pomocí numerických metod - konkrétně metody konečných prvků, pro různé okrajové podmínky. Výpočet bude realizován za příkladu nosníku zatíženým osamělou silou uprostřed s příčným průřezem I (Obr.1.1).



Obr. 1.1: Přímý nosník zatížený osamělou silou uprostřed (vlevo) s příčným průřezem I (vpravo)

2 Teoretická část

2.1 Smykové napětí při ohybu

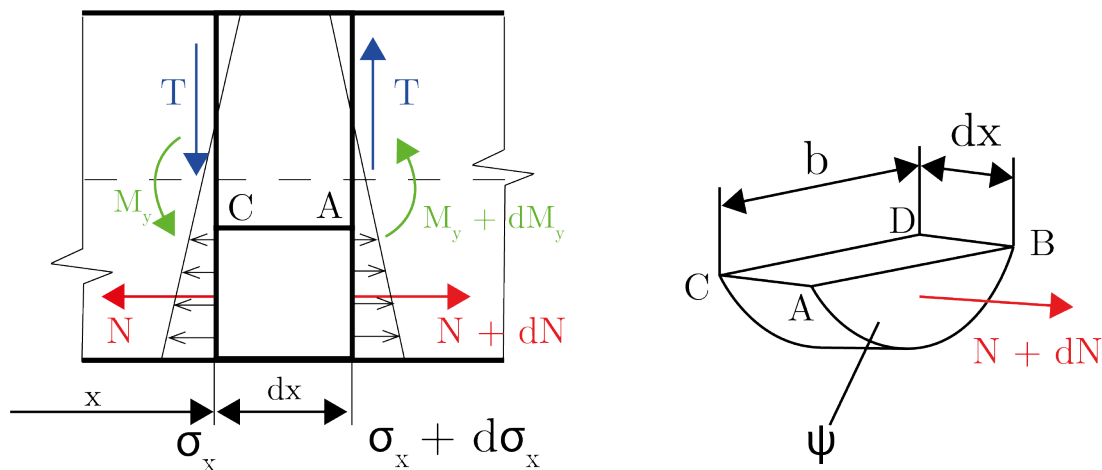


Obr. 2.1: Přímý prut zatížený dvěma osamělými silami F_1 a F_2 (a), Symetrický příčný průřez prutu (b) a uvolněný prvek prutu Ω_1 (c)[2][3]

Mějme přímý prizmatický prut, který je zatížen dvěma osamělými silami F_1 a F_2 (Obr. 2.1 a). Ze statické rovnováhy uvolněného prvku prutu (Obr. 2.1 c) vyplývá, že v řezu musí působit posouvající síla $T(x)$, která vyvolá smykové napětí τ , jehož velikost a rozložení po výšce příčného průřezu je možné vypočítat tzv. *Žuravského vztahem*, který nyní odvodíme. [2]

Pro výpočet je potřeba uvažovat pouze příčné průřezy, které mají alespoň jednu osu symetrie, ve které působí posouvající síla T . Žuravský při odvození vychází z prutu zavedl pro odvození tohoto vzorce důležitý předpoklad a to sice, že smyková napětí τ_{xz} jsou po šířce příčného průřezu rozložena rovnoměrně (Obr. 2.1 b), jak uvidíme dále v kap.2.1.1 tento předpoklad není úplně přesný a platí pouze pro úzké průřezy. Předpokládá se také platnost prutových předpokladů, které jsou uvedeny v [4].

Sledujme elementární úsek prutu (Obr. 2.2 vlevo), který je vymezen dvěma příčnými průřezy ve vzdálenosti dx a rovinou $z = \text{konst.}$ (která se do řezu promítne, jako úsečka C - A). Jednotlivé veličiny jsou v pravé a levé části řezu odlišné. Ohybový moment je v pravé části řezu větší o dM_y . Zvětšení ohybového momentu zvětší i jím vyvolané normálové napětí, které bude mít v levé části řezu velikost σ_x a v pravé části $\sigma_x + d\sigma_x$. Výslednice normálového napětí v levé části řezu je N a v pravé části řezu je $N + dN$. Plochu, která je vymezená od úsečky AB (Obr. 2.2 vpravo) dolů označíme jako ψ . Integrací normálového napětí σ_x po ploše ψ dostaneme výslednici



Obr. 2.2: Elementární úsek prutu [3]

normálového napětí N (2.1) a její diferenciál dN (2.2) [3]

$$N = \int_{\psi} \sigma_x d\psi \quad (2.1)$$

$$dN = \frac{dN}{dx} dx \quad (2.2)$$

Do rovnice 2.1 dosadíme vztah pro výpočet normálového napětí u ohýbaných nosníků 2.3 a zintegrujeme 2.4[3]

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z \quad (2.3)$$

$$N = \int_{\psi} \sigma_x d\psi = \frac{M_y}{J_y} \int_{\psi} z d\psi = \frac{M_y}{J_y} U_{y\psi} \quad (2.4)$$

Rovnici 2.4 dosadíme do rovnice 2.2 a výpočteme diferenciál dN [3]

$$dN = \frac{dN}{dx} dx = \frac{d}{dx} \left(\frac{M_y}{J_y} U_{y\psi} \right) dx = \frac{dM_y}{dx} \frac{U_{y\psi}}{J_y} dx \quad (2.5)$$

Nosník je prizmatický, proto tedy jediná veličina, která je závislá na souřadnici x , je ohybový moment M_y . Derivace ohybového momentu M_y je podle Schwedlerovy věty rovna posouvající síle T_x 2.6, tu dosadíme do vztahu 2.5 a dostaneme vztah 2.7 [3]

$$\frac{dM_y}{dx} = T_x \quad (2.6)$$

$$dN = T_x \frac{U_{y\psi}}{J_y} dx \quad (2.7)$$

Výslednice smykových napětí, které působí na horní plochu oddělené části průřezu je rovna vztahu 2.8[3]

$$dT = t_{xz} b dx \quad (2.8)$$

Platnost vztahu 2.8 je podmíněna platností zákonem o sdružených smykových napětí, který říká, že napětí ve dvou vzájemně kolmých řezech mají stejnou velikost, tzn: $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ [4].

Výslednice síly ve směru osy x, působící na oddělenou část nosníku je rovna nule, musí tedy platit podmínka statické rovnováhy rovnováhy 2.9[3]

$$dT + N = N + dN \quad (2.9)$$

$$dT = dN \quad (2.10)$$

Dosazením vztahů 2.8 a 2.7 rovnice 2.10 dostaneme rovnost 2.11 a po vyjádření smykového napětí i vztah hledaný **Žuravského vztah** 2.12 [3]

$$t_{xz} b dx = T_x \frac{U_{y\psi}}{J_y} dx \quad (2.11)$$

$$t_{xz} = t_{zx} = \frac{T_x U_{y\psi}}{J_y b} \quad (2.12)$$

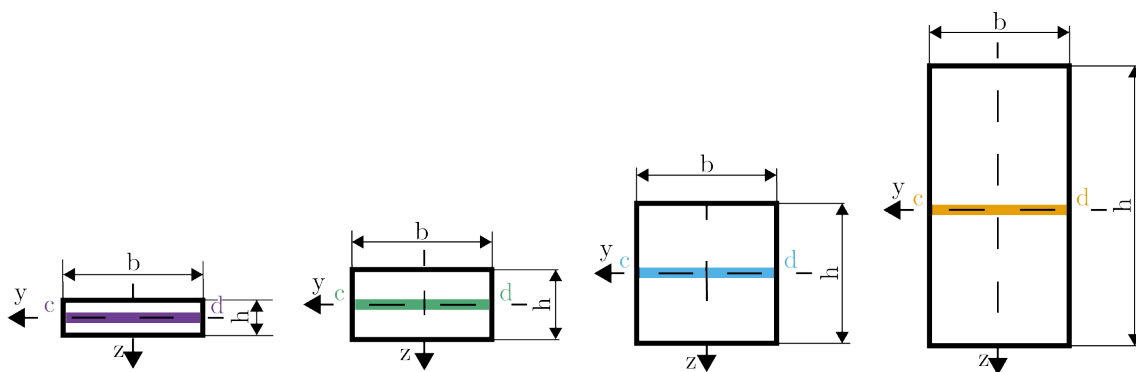
2.1.1 Nepřesnosti Žuravského vztahu

Předpoklady, které byly zavedeny k odvození Žuravského vztahu a prutové předpoklady, nelze v praxi splnit úplně přesně. V následujících dvou kapitolách jsou popsány možné nepřesnosti, které z těchto předpokladů plynou.

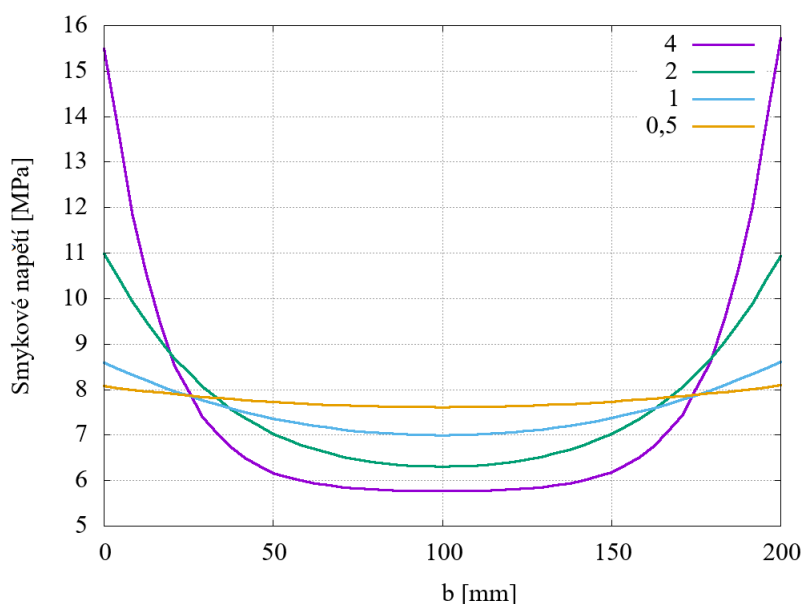
Nepřesnosti plynoucí z Žuravského předpokladů

Žuravského předpoklad o rovnoměrném rozložení napětí τ_{xz} po šířce průřezu není přesný. Rovnoměrné rozložení smykového napětí τ_{xz} lze předpokládat pouze pro dostatečně úzké průřezy (úzké obdelníky na výšku) a pokud je uvažovaný průřez dostatečně daleko od vnějšího zatížení. Pro široké průřezy je tento předpoklad nesprávný a maximální smykové napětí po šířce průřezu je vyšší než udává Žuravského vzorec, což může být nebezpečné u některých materiálů například u dřevěných trámů, které špatně snáší smyk po vlákněch (dřevěný trám se nejčastěji poruší po délce v neutrální ose, kde je smykové napětí největší).[5]

Pro srovnání byly pomocí metody konečných prvků nasimulovány čtyři prostě podepřené nosníky zatížené osamělou silou uprostřed s obélníkovými průřezy s různými poměry b/h (Obr. 2.3). U těchto průřezů bylo vykresleno smykové napětí τ_{xz} po šířce průřezu (úsečka CD). Výsledek je vykreslen v grafu na obrázku 2.4.



Obr. 2.3: Průřezy s různými poměry b/h , zleva: $b/h = 4$, $b/h = 2$, $b/h = 1$, $b/h = 0,5$



Obr. 2.4: Rozložení smykového napětí τ_{xz} po šířce průřezu pro různé poměry b/h ,

U zadaného I profilu dosahuje maximální smykové napětí τ_{xz} na stojině profilu, která je velmi tenká, proto zde lze uvažovat rovnoměrné rozložení napětí τ_{zx} po šířce průřezu.

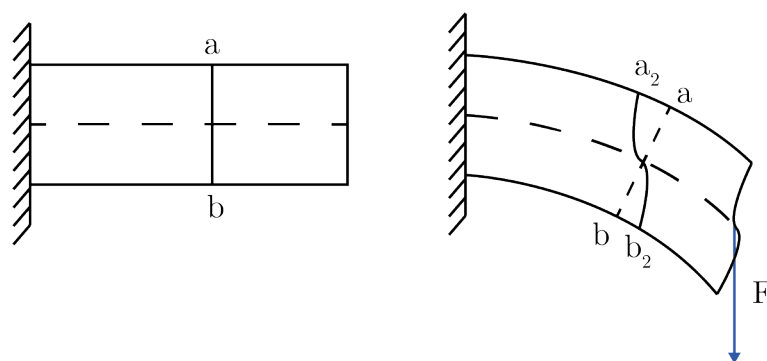
Žuravského vztah také při řešení některých průřezů udává náhlé skoky v rozložení smykových napětí (viz Obr. 3.17), což ve skutečnosti není možné. Plynulost smykových napětí nemůže být přerušena bez ohledu na to, jak se mění šířka příčného průřezu [5].

Nepřesnosti plynoucí z prutových předpokladů

Předpoklady, na kterých je postavena teorie pružnosti prutů, taktéž nejsou splněny přesně. V následující kapitole je u jednotlivých prutových předpokladů uveden stručný popis a srovnání se skutečným nosníkem. Přesná definice prutových předpokladů je uvedena ve skriptech [4]

Geometrické předpoklady říkají, že prut je jednoznačně vymezen střednicí a příčným průřezem [4], toto platí, pokud je délka nosníku výrazně vyšší než výška příčného průřezu. V našem případě kdy uvažujeme krátké nosníky je potřeba uvažovat celou geometrii tělesa (proto je nosník v metodě konečných prvků modelován pomocí prvku SOLID a nikoliv pomocí prvku BEAM). Vyhodnotit vliv tohoto faktu na rozložení smykových napětí je jedním z cílů této práce.

Deformační předpoklady říkají, že příčné průřezy zůstávají v průběhu deformace rovinné a kolmé na zdeformovanou střednici [4]. V praxi toto neplatí. Právě důsledkem smykových napětí je tzv. *deplnace příčného průřezu* (Obr. 2.5). Původní příčný průřez označený úsečkou ab přejde po zatížení do příčného průřezu, který je označen křivkou a_2b_2 [6] (který je deformovaný a není kolmý na střednici). V kapitole 2.2 jsou uvedeny příklady přesnějších teorií, které narozdíl od teorie pružnosti prutů, počítají s vlivem smykového napětí na příčný průřez.



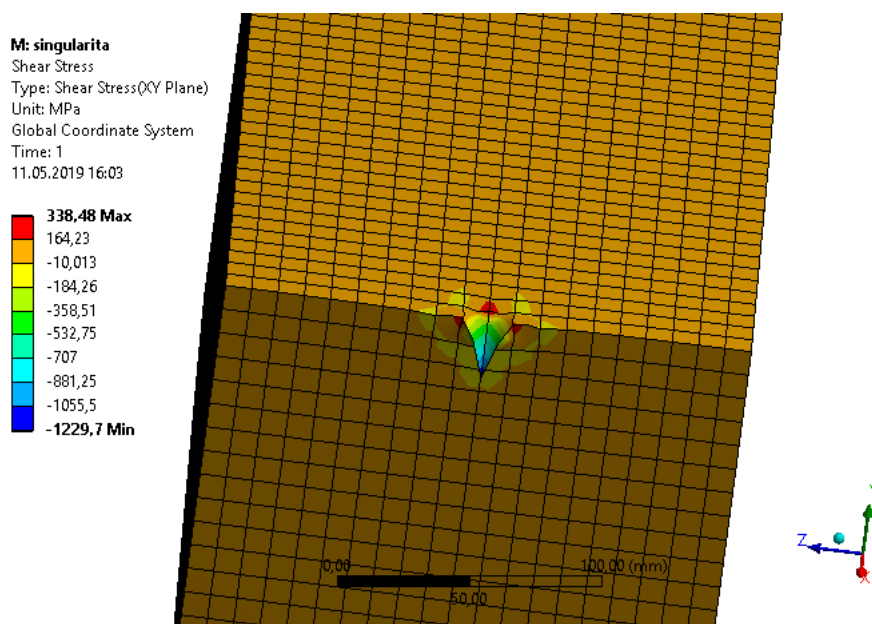
Obr. 2.5: Vlevo - nezatížený nosník, vpravo - nosník zatížený osamělou silou F se zakreslenou deplanací příčného průřezu [6]

Vazbové a zatěžovací předpoklady říkají, že veškeré vazby a zatížení se omezují pouze na střednici a zatížení je realizováno pouze pomocí silového působení osamělých a linových sil, nebo silových dvojic [4]. Takovéto druhy zatížení působí na těleso na ploše o nulovém obsahu, tím pádem by v okolí zatížení vyvolávalo nekonečně velké napětí. Pokud namodelujeme těleso v programu využívající metodu konečných prvků, které zatížíme osamělou silou, nebo liniovým zatížením, tak programem vypočítané napětí pod silou nebude nekonečně velké, ale bude záležet

na velikosti prvku, čím menší prvek použijeme k vytvoření sítě, tím větší bude vyvolané napětí. Dojde tedy ke vzniku tzv. *Singularity*. Tento jev je vidět na Obr. 2.6, kde je nasimulovaný nosník, který je na jedné straně vetknutý a na druhé straně zatížený osamělou silou s velikostí prvku sítě 10 mm. Hodnota smykového napětí v okolí zatížení se pohybuje od -1229,7 do 338,48 MPa. Pokud bychom zmenšili velikost prvku na 5 mm, potom hodnota smykového napětí v okolí zatížení bude od -1517 do 6029 MPa. Pokud se chceme vyhnout zkreslení výsledku vlivem singularit, můžeme:

- zanedbat napjatost tělesa v okolí působíště osamělé síly definovaném podle St. Vénantova principu a sledovat napjatost pouze ve zbytku nosníku.
- reálné tlakové zatížení nenahrazovat osamělou silou

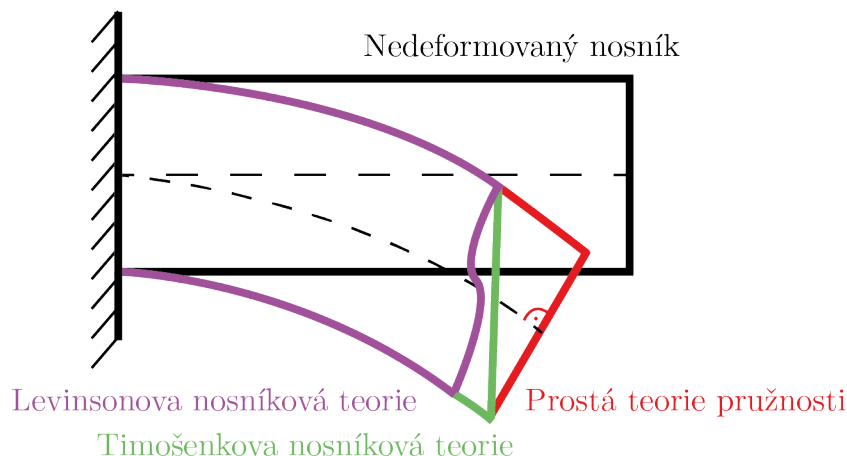
Obě možnosti budou využity při simulaci nosníku průřezu I v kapitole 2.2.3



Obr. 2.6: Nosník zatížený osamělou silou s konečnoprvkovou sítí o velikosti prvku 10 mm

2.2 Alternativní teorie ohybu

V následujících kapitolách jsou uvedeny dvě další teorie pro výpočet ohybu, které počítají s vlivem smykových napětí na příčný průřez, budou zde však uvedeny pouze některé vztahy. Další rovnice, společně s příklady řešení statických úloh jsou uvedeny v článku [7]. Porovnání obou teorií s klasickou teorií pružnosti je znázorněno na Obr. 2.7.



Obr. 2.7: Porovnání Levisovy, Timošenkovy a Prosté teorie pružnosti

2.2.1 Timošenkova nosníková teorie

Timošenkova nosníková teorie je pojmenována po svém objeviteli Stepanu Timosenkovi (1878 - 1972), který byl významným profesorem na univerzitě v Michiganu a později působil na Sandfordově univerzitě. Během svého života napsal celou řadu významných knih a také se na jeho počest uděluje tzv. Timošenkova medaile, což je jedno z nejprestižnějších ocenění pro inženýry v oblasti strojírenství [8].

Timošenko do svých výpočtů zahrnul i vliv smykových napětí, která při ohybu vznikají. Předpokládá, že smykové napětí je po průřezu rozděleno rovnoměrně, proto se průřez pouze natáčí okolo střednice a dál se nedeformuje (jinými slovy, Timošenko odstraňuje předpoklad o zachování kolmosti průřezu na střednici prutu v průběhu deformace Obr. 2.8) [7].

Pro výpočet ohybového momentu M a posouvající síly T odvodil Timošenko vztahy 2.13 a 2.14 (pro prut obdélníkového průřezu)[7].

$$M_o = EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.13)$$

$$T = \kappa^2 AG \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.14)$$

Kde:

E je modul pružnosti v tahu

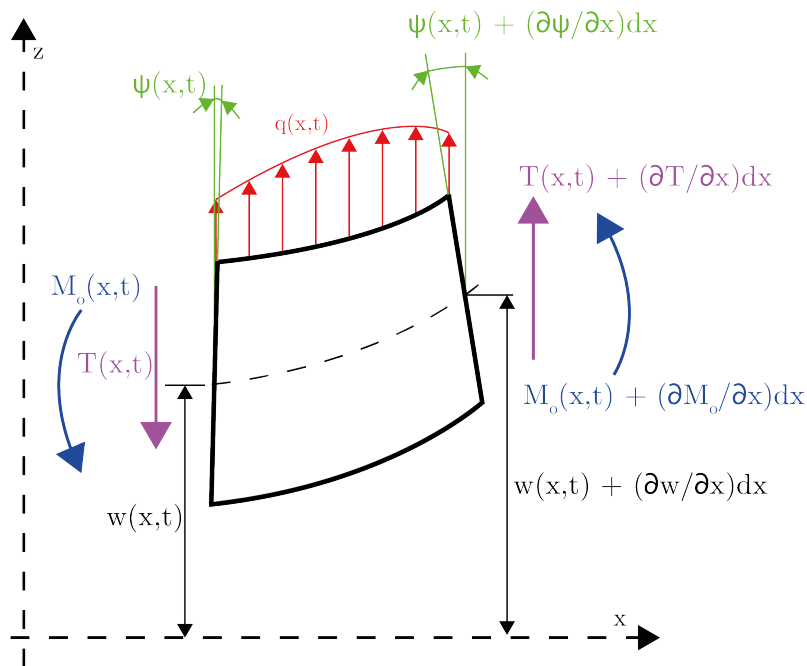
G je modul pružnosti ve smyku

I je kvadratický moment průřezu

A je obsah plochy průřezu

ψ je funkce popisující rotaci příčného průřezu

w je funkce popisující průhyb neutrální plochy



Obr. 2.8: Uvolněný prvek prutu podle Timošenkovy teorie [7]

κ je tzv. *smykový koeficient*, který Timošenko vložil do svých rovnic, aby výsledky jeho výpočtů co nejlépe odpovídaly výsledkům experimentů. Přesnému určení smykového koeficientu se věnovalo mnoho autorů a dodnes neexistuje jednoznačný názor na to, jak jej vyčíslit. Jedno z možných řešení, pro tenké obdélníkové průřezy, je uvedeno ve vztahu 2.15 [9].

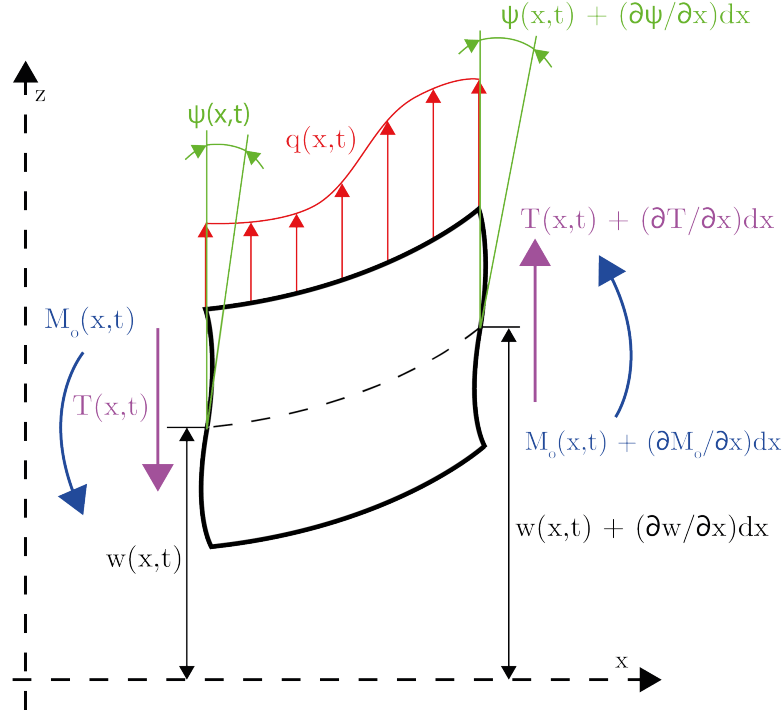
$$\kappa = 5 \frac{1 + \mu}{(6 + 5\mu)} \quad (2.15)$$

Kde μ je Poissonovo číslo. Pro hodnotu $\mu = 0,3$ vychází hodnota smykového koeficientu 0,86.

2.2.2 Levinsonova nosníková teorie

Levinsonova nosníková teorie (originální název: *A new rectangular beam theory*) je další teorie popisující ohyb nosníků. Publikovaná byla poprvé v roce 1980 Markem Levinsonem v časopise [7].

Tato teorie poprvé zohledňuje i fakt, že smykové napětí je po příčném průřezu rozděleno neromálně, tím připouští borcení příčných průřezů (Obr. 2.9). Levinson ve svých rovnicích vypouští smykový koeficient, což je velká výhoda oproti Timošenkově teorii. Nevýhoda této teorie je, že výpočetní vztahy jsou poměrně složité a byla odvozena pouze pro pruty obdélníkových průřezů o výšce průřezu h a šířce



Obr. 2.9: Uvolněný prvek prutu podle Levinsovy teorie [7]

průřezu 1 [7].

Funkce, která popisuje deplanaci příčného průřezu (*warping function*) je definována vztahem 2.16 [7]

$$\Phi(x, t) = -\left(\frac{4}{3h^2}\right)\left(\psi + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (2.16)$$

Posuv bodu tělesa ve směru osy x se značí jako u je vyjádřen vztahem 2.17 [7]

$$u = z\psi(x, t) + z^3\Phi(x, t) \quad (2.17)$$

Ohybový moment M_o je vyjádřen vztahem 2.18 [7]

$$M_o = \left(\frac{EI}{5}\right)\left(4\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad (2.18)$$

Posouvající síla T je popsána vztahem 2.19 [7]

$$T = \frac{2}{3}AG\left(\psi + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (2.19)$$

Jednotlivé symboly mají stejný význam, jako u Timošenkovy nosníkové teorie s výjimkou funkce ψ , která nyní popisuje rotaci příčného průřezu na neutrální ploše.

3 Výpočetní část

V této kapitole sestavíme jednotlivé výpočetní modely, pro zadaný nosník, který je na Obr. 1.1 a to jednak pro analytický výpočet a následně pro numerický výpočet. Rozměry příčného průřezu byly vybrány z katalogu firmy TRIMOT s.r.o. a jsou uvedeny v Tab. 3.1 [10]. Nosič je vyroben ze standartní konstrukční oceli označené, jako S235JR podle normy ČSN EN 10025-2 [11], jejíž materiálové charakteristiky jsou uvedeny v Tab. 3.2. Zadána je také bezpečnost na ohyb $k = 1,5$.

Parametr	b	h	tw	t
Rozměr [mm]	113	260	10	14,1

Tab. 3.1: Rozměry příčného průřezu

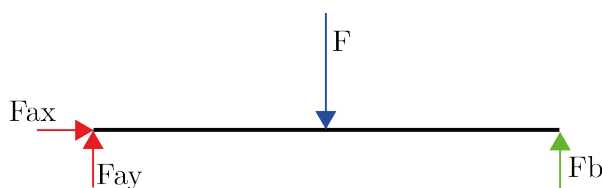
Parametr	R_e	E	μ
Rozměr	235 [MPa]	210 000 [MPa]	0,3

Tab. 3.2: Materiálové charakteristiky oceli S235JR

3.1 Analytický výpočet

3.1.1 Výpočet reakcí ve vazbách

Pro analytický výpočet považujeme nosník za prutové těleso. První krok je, že provedeme úplné uvolnění reakcí ve vazbách Obr. 3.1. Neznáme parametry NP jsou



Obr. 3.1: Úplné uvolnění vazeb

3.1

$$NP = \{F_{ax}, F_{ay}, F_b\} \quad (3.1)$$

Máme tedy tři neznámé parametry 3.2

$$u = 3 \quad (3.2)$$

V rovině jsou tři použitelné rovnice statické rovnováhy 3.3

$$v = 3 \quad (3.3)$$

Úloha je staticky určitá 3.4

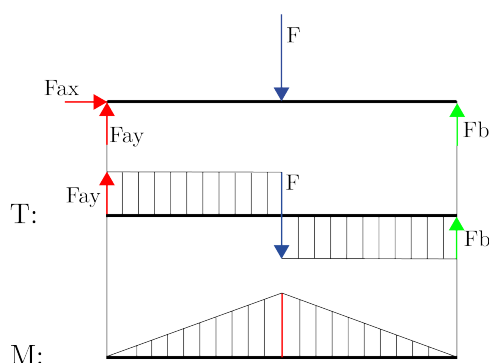
$$S = u - v = 3 - 3 = 0 \quad (3.4)$$

Protože v ose x nepůsobí žádné zatížení 3.5 a prut je zatížený uprostřed, lze rovnou určit reakce ve vazbách 3.6

$$F_{ax} = 0 \quad (3.5)$$

$$F_{ay} = F_b = \frac{F}{2} \quad (3.6)$$

Na Obr. 3.2 jsou vykreslené výsledné vnitřní účinky (VVÚ) podél střednice prutu, Posouvající síla T má tedy podél celého prutu stejnou velikost 3.7



Obr. 3.2: VVU podél střednice prutu

$$T = +\frac{F}{2}, -\frac{F}{2} \quad (3.7)$$

3.1.2 Geometrické charakteristiky příčného průřezu

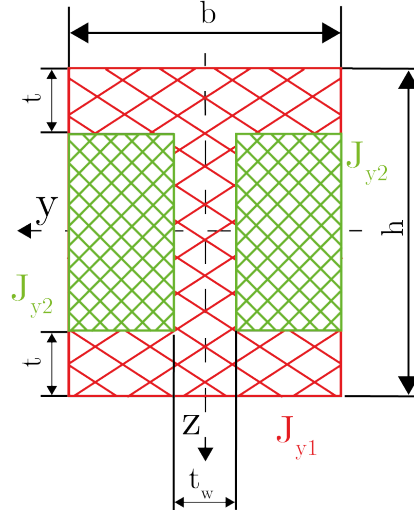
Pro výpočet rozložení smykového napětí τ_{xz} je potřeba určit geometrické charakteristiky příčného průřezu, konkrétně kvadratický moment průřezu J_y a lineární moment oddělené části průřezu $U_{y\psi}$.

Výpočet kvadratického momentu průřezu

Pro výpočet kvadratického momentu obdélníku k ose y procházejícím těžištěm šířky b a výšce h platí vztah 3.8 [4]. Kvadratický moment příčného průřezu I se vypočítá, jako kvadratický moment velkého obdélníku J_{y1} , od kterého se odečtou dva

kvadratické momenty dvou menších obdélníků J_{y2} Obr. 3.3 rovnice 3.3.

$$J_y = \frac{bh^3}{12} \quad (3.8)$$



Obr. 3.3: K výpočtu kvadratického momentu I profilu

$$J_y = \frac{bh^3}{12} - 2\left[\frac{\frac{b-t_w}{2}(h-2t)^3}{12}\right] \quad (3.9)$$

Výpočet lineárního momentu oddělené části průřezu

Lineární moment oddělené části příčného průřezu $U_{y\psi}$ k ose y je definován vztahem 3.10 [4].

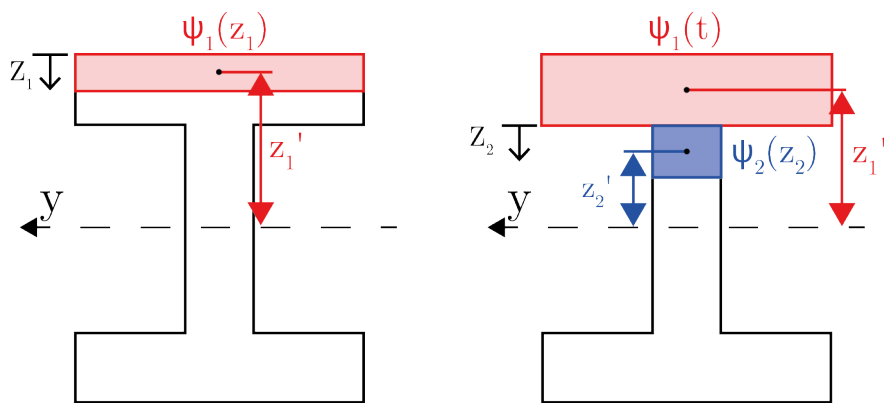
$$U_{y\psi} = \int_{\psi} z d\psi = z' \psi \quad (3.10)$$

kde ψ je plocha oddělené části průřezu a z' je vzdálenost těžiště plochy ψ od osy y . Lineární moment oddělené části zadaného průřezu $U_{y\psi}$ vyjádříme v závislosti na souřadnici z . Výpočet je třeba rozdělit na dvě části. V první části (Obr. 3.4 vlevo), kde $z_1 \in (0, t) \cup (h - t, h)$, je lineární moment průřezu $U_{y\psi_1}$ dán v závislosti na z_1 podle 3.11

$$U_{y\psi_1}(z_1) = z'_1 \psi_1 = z'_1 b z_1 = \left(\frac{h}{2} - \frac{z_1}{2}\right) b z_1 = -\frac{b}{2} z_1^2 + \frac{bh}{2} z_1 \quad (3.11)$$

V druhé části (Obr. 3.4 vpravo), kde $z_2 \in (0; h - 2t)$ je lineární moment průřezu $U_{y\psi_2}$ dán vztahem 3.12, po roznásobení vyjde vztah 3.13

$$U_{y\psi_2}(z_2) = U_{y\psi_1}(t) + \psi_2 z'_2 = U_{y\psi_1}(t) + t_w z_2 z'_2 = U_{y\psi_1}(t) + t_w z_2 \left(\frac{h-2t}{2} - \frac{z_2}{2}\right) \quad (3.12)$$



Obr. 3.4: Výpočet lineárního momentu průřezu

$$U_{y\psi 2}(z_2) = -\frac{t_w}{2} z_2^2 + \left(\frac{(h-2t)t_w}{2}\right) z_2 + U_{y\psi 1}(t) \quad (3.13)$$

Maximální hodnotu nabývá lineární moment $U_{y\psi 2}$ uprostřed průřezu 3.14

$$U_{y\psi 2_max} = bt\left(\frac{h-t}{2}\right) + t_w \frac{(h-2t)^2}{8} \quad (3.14)$$

3.1.3 Výpočet zatížení a délky nosníku

V zadání úlohy bylo stanoveno, že bezpečnost při výpočtu na ohyb $k = 1,5$, nosník je délky l , pokud začneme nosník zkracovat, tak bude při zachování konstantní bezpečnosti na ohyb růst přípustné zatížení (síla F_{max}). Abychom nosník mohli ještě považovat za prutové těleso, tak nesmíme mít nosník kratší než, je výška průřezu h

Mez pružnosti R_e daného materiálu je uvedena v Tab. 3.2, pro výpočet normálového napětí platí vztah 3.24. Pro výpočet dovoleného normálového napětí σ_d platí rovnost 3.15

$$\frac{R_e}{k} = \sigma_d = \frac{M_y \frac{h}{2}}{J_y} \quad (3.15)$$

Kde pro výpočet ohybového momentu pro zadaný nosník M_y platí vztah 3.16

$$M_y = \frac{F l}{2 \cdot 2} \quad (3.16)$$

Dosazením vztahu 3.16 do vztahu 3.15 vyjádříme maximální přípustnou osamělou sílu F_{max} jako funkci délky nosníku l (3.18)

$$\frac{R_e}{k} = \frac{\frac{F_{max} l}{2} \frac{h}{2}}{J_y} \quad (3.17)$$

$$F_{max} = \frac{8R_e J_y}{k l h} = \frac{8R_e J_y}{k h} \frac{1}{l} \quad (3.18)$$

Při zvětšování velikosti síly F roste i velikost posouvající síly T a tím i smykové napětí τ . Na průřezu I je maximální smykové napětí τ_{xz_max} je uprostřed, kde je i maximální lineární moment $U_{y\psi2_max}$

$$\tau_{xz_max} = \frac{U_{y\psi2_max} \frac{4R_e I_y}{klh}}{J_y t_w} = \frac{U_{y\psi2_max} \frac{4R_e I_y}{kh}}{J_y t_w} \frac{1}{nh} \quad (3.19)$$

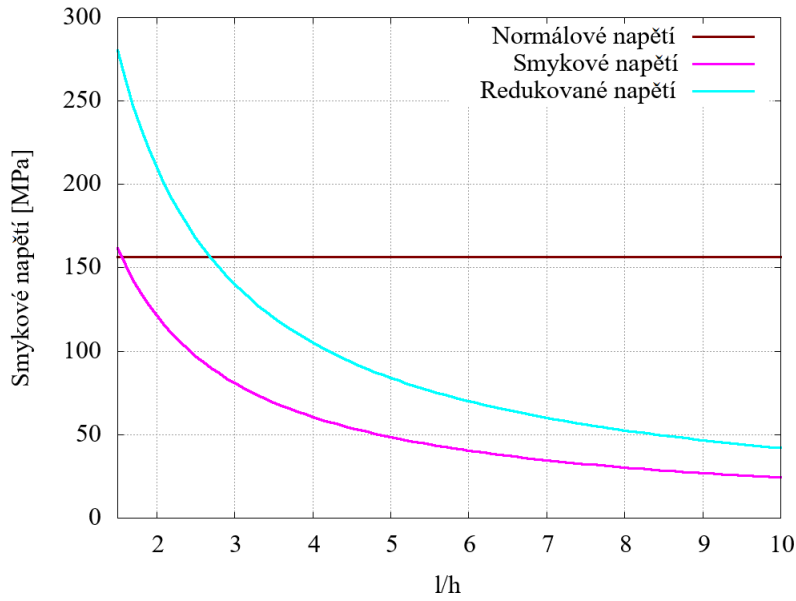
Kde n značí poměr délky nosníku l a výšky průřezu h , který je určujícím faktorem pro velikost vlivu smykových napětí (Je-li h řádově stejně velké jako l , pak se smykové napětí projeví nejvýrazněji)[12]. Závislost vypočteného maximálního smykového napětí τ_{xz} na n při zachování konstantní bezpečnosti na ohyb a pro rozměry příčného průřezu z Tab. 3.1, je uvedena v grafu na Obr. 3.5. Do grafu vyneseme i normálové napětí σ_x na povrchu (které je po celou dobu konstantní) a redukované napětí σ_{red} v těžišti průřezu. Z podmínky plasticity HMM se redukované napětí pro prutovou napjatost vypočte jako [4]

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xz}^2} \quad (3.20)$$

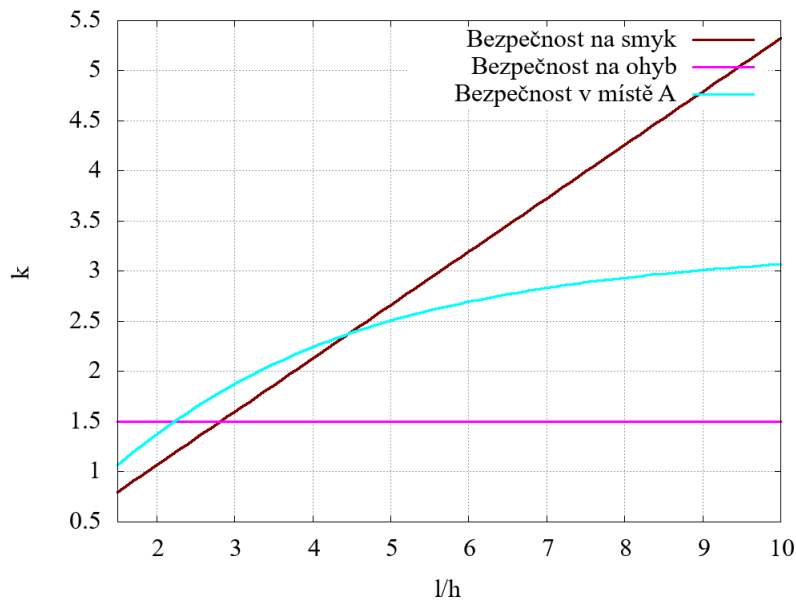
V těžišti průřezu je normálové napětí σ_x rovno nule, proto platí

$$\sigma_{red} = \sqrt{3\tau_{xz}^2} = \sqrt{3}\tau_{xz} \quad (3.21)$$

Bezpečnost na smyk za použití podmínky plasticity HMM v závislosti na poměru l/h je vykreslena v grafu na Obr. 3.6, pro lepší orientaci je zde vyznačena i bezpečnost na ohyb. Bezpečnost v místě A je vysvětlena v kapitole 3.1.5



Obr. 3.5: Závislost vypočteného maximálního smykového napětí τ_{xz} , Redukovaného napětí σ_{red} v těžišti příčného průřezu a Normálového napětí σ_x na povrchu na poměru délky nosníku l a výšky průřezu h při zachování konstantní bezpečnosti na ohyb a pro rozměry příčného průřezu z Tab. 3.1



Obr. 3.6: Závislost bezpečností k na poměru l/h

3.1.4 Rozložení smykových napětí po výšce průřezu

Výpočet bude opět rozdělen na dvě části. V první části, kde $z_1 \in (0; t) \cup (h - t; h)$ dosadíme Žuravského vztahu 2.12 rovnice 3.11, 3.9, 3.18 a jako b volíme šířku pásnice.

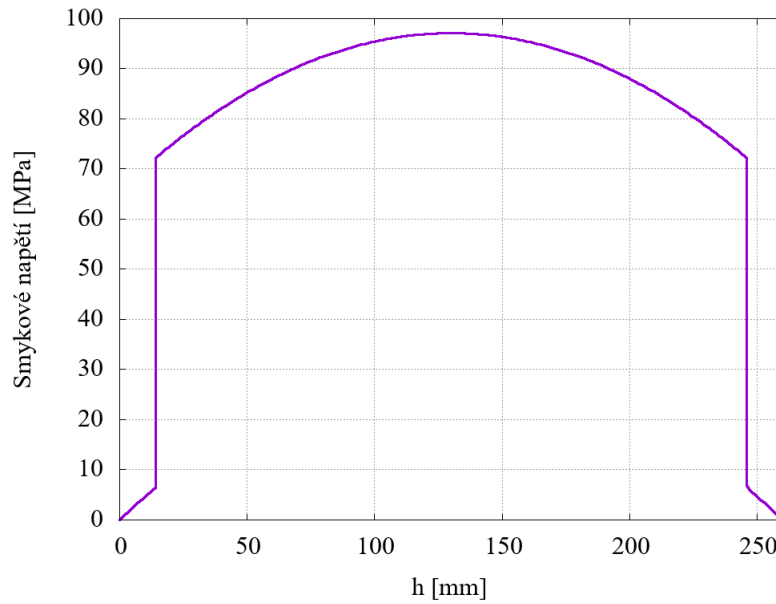
Výsledkem je vztah pro rozložení smykového napětí τ_{xz} na pásnicích I profilu 3.22

$$\tau_{xz} = \frac{\left(-\frac{b}{2}z_1^2 + \frac{bh}{2}z_1\right)\frac{4R_eJ_y}{klh}}{J_yb} \quad (3.22)$$

V druhé části, kde $z_2 \in (0; h - 2t)$ dosadíme do Žuravského vztahu 2.12 rovnice 3.13, 3.9 a 3.18 a jako b volíme šířku stojny. Výsledkem je vztah pro rozložení smykového napětí τ_{xz} na stojně I profilu 3.23

$$\tau_{xz} = \frac{\left(-\frac{t_w}{2}z_2^2 + \left(\frac{h-2t}{2}\right)t_w z_2 + U_{y\psi 1}(t)\right)\frac{4R_eJ_y}{klh}}{J_yt_w} \quad (3.23)$$

Vztahy 3.22 a 3.23 jsou finální vztahy pro výpočet rozložení smykového napětí τ_{xz} podél průřezu I na Obr. 1.1. V grafu na Obr. 3.6 je vidět, že pokud bude mít nosník délku mezi $2h$ až $2,8h$, tak se smykové napětí projeví nejvýrazněji a zároveň nedojde k plastické deformaci vlivem smyku. Na základě tohoto faktu zvolíme délku nosníku $l = 2,5h$ a pro tuto délku a tomu odpovídající zatížení F při zachování bezpečnosti na ohyb $k = 1,5$ vykreslíme teoretické rozložení smykového napětí τ_{xz} . (Obr. 3.7)

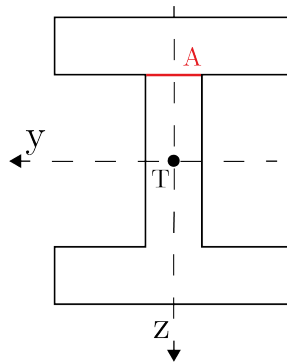


Obr. 3.7: Teoretické rozložení smykového napětí τ_{xz} podle Žuravského vztahu

3.1.5 Potenciálně nebezpečné místo na průřezu

Na příčném průřezu I se nachází místo A (Obr. 3.8), kde τ_{zx} dosahuje téměř maximální hodnoty, také normálové napětí σ_x je zde skoro maximální. Nabízí se tedy v tomto místě zkontrolovat bezpečnost.

Redukované napětí se podle podmínky platicity HMM pro prutovou napjatost vypočte ze vztahu 3.20. Normálové napětí σ_x v místě A dáno vztahem 3.24



Obr. 3.8: Nebezpečné místo na průřezu

$$\sigma_x = \frac{\frac{F}{2} \frac{l}{2} \left(\frac{h-2t}{2} \right)}{J_y} \quad (3.24)$$

Smykové napětí τ_{zx} v místě A je dáno rovnicí 3.25

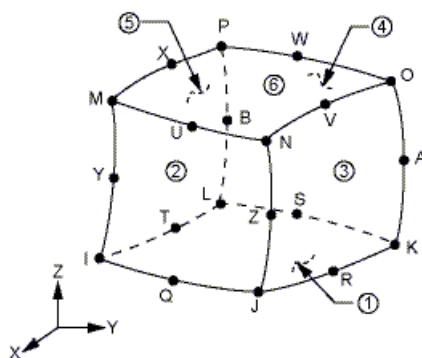
$$\tau_{xz} = \frac{\left(-\frac{b}{2}t^2 + \frac{bh}{2}t \right) \frac{4R_e J_y}{klh}}{J_y t_w} \quad (3.25)$$

V tomto konkrétním místě dochází vlivem ostrého přechodu ke koncentraci smykového napětí a tím i ke snížení bezpečnosti, proto zde výrobci obvykle navrhnou zaoblení a to takové, aby toto místo nebylo nebezpečné. Pro náš model je bezpečnost v místě A v závislosti na délce nosníku je vykreslena v grafu na Obr. 3.6 (modrá křivka). Na grafu je vidět, že bezpečnost v místě A je vždy větší než bezpečnost uvažovaná pouze na smyk, nebo na ohyb. K plastickým deformacím nosníku tedy dříve dojde buď na vnější straně nosníku vlivem normálového napětí, a nebo uprostřed nosníku vlivem smyku, pro náš konkrétní model tedy toto místo bezpečnost nesnižuje .

3.2 Numerický výpočet pomocí MKP

MKP, nebo-li metoda konečných prvků je v inženýrské praxi asi nejpoužívanější numerickou metodou pro výpočet deformací a napětí těles. Podrobný rozbor metody konečných prvků není předmětem této práce. Matematický základ a rozbor této metody je popsán například ve studijních oporách [13]. K simulacím byl použit výpočtový software ANSYS Workbench 18.1. Výpočtový model byl sestaven pomocí prvku SOLID186. Charakteristika prvku, nastavení okrajových podmínek a výsledky výpočtu jsou prezentovány v následujících kapitolách.

3.2.1 Charakteritika prvku SOLID186



Obr. 3.9: Prvek SOLID186 (Upraveno z[13])

Prvek SOLID 186 je kvadratický dvacetí uzlový prvek s osmi body ve vrcholech a dvanácti na hranách. Každý uzel má tři stupně volnosti (posuvy ve směru osy x, y, z). Celkově tedy prvek disponuje šedesáti deformačními parametry [13].

3.2.2 Model nosníku a vytvoření konečnoprvkové sítě

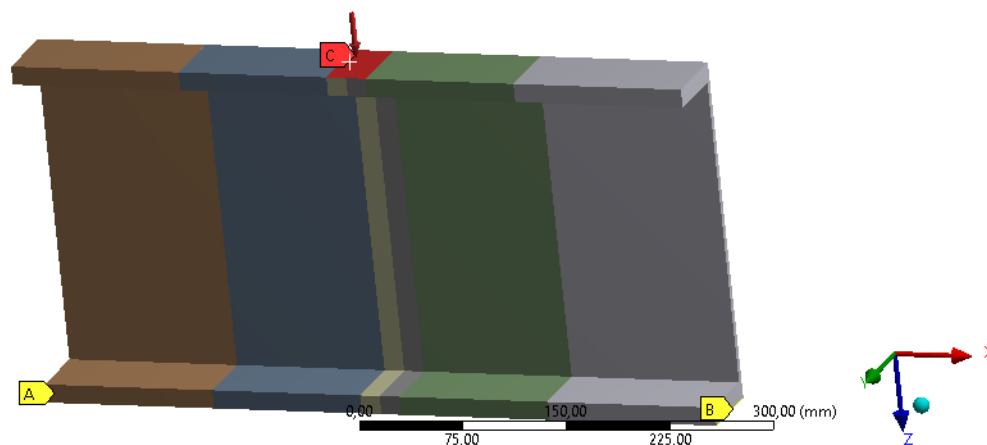
Rozměry příčného průřezu nosníku jsou uvedeny v Tab. 3.1 Při modelování nosníku je vhodné využít symetrie příčného průřezu nosníku, sníží se tak počet prvků sítě a tím i doba výpočtu. Velikost prvku sítě byla nastavena na 4 mm.

3.2.3 Nastavení délky nosníku

V grafu na Obr. 3.6 je vidět, že pokud bude mít nosník délku $2h$ (a bude zatížen tomu odpovídajícím zatížením, pro zachování bezpečnosti na ohyb $k = 1,5$), tak teoreticky

L: icko jiny SS
 Static Structural
 Time: 1, s
 22.05.2019 1:46

A Displacement
B Displacement 2
C Pressure: 156,66 MPa



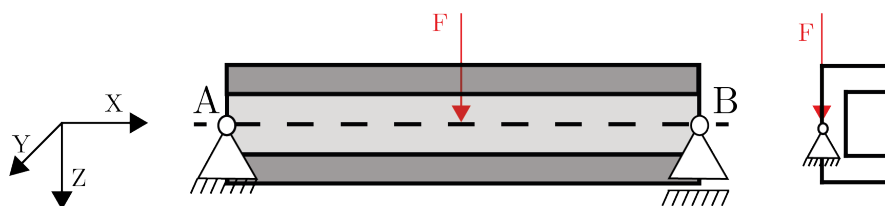
Obr. 3.10: Geometrie nosníku

ještě nedojde k plastickým deformacím vlivem smyku, tuto délku tedy vezmeme jako minimální. Délku nosníku nastavíme, jako parametr v intervalu $(2h; 10h)$. V intervalu $(2h; 4h)$ je nastaven krok $0,5h$ a v intervalu $(4h; 10h)$ je nastaven krok h .

3.2.4 Nastavení zatížení a okrajových podmínek

Rotace okolo jednotlivých os netvoří u objemových prvků stupně volnosti, proto není potřeba rotacím zamezovat. Posuv ve směru osy z je zamezen rovinnou symetrie, posuvy ve směru osy y a x u vazby A a ve směru osy y u vazby B se zamezí příkazem DISPLACEMENT.

Při snaze přiblížit se co nejvíce modelovým okrajovým podmínkám z analytického výpočtu je nosník zavazben podle Obr. 3.11. Nosník je zavazben na krajích

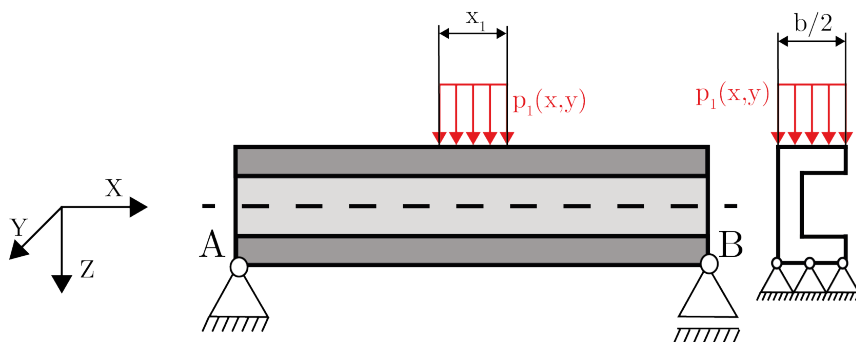


Obr. 3.11: Zatížení nosníku a okrajové podmínky vyplývající z prutových předpokladů (MODEL 1)

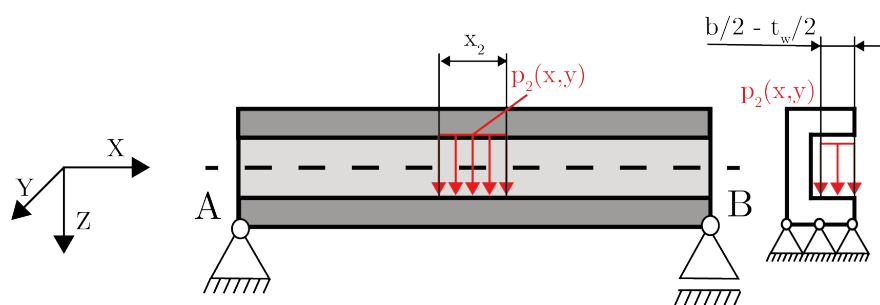
v polovině výšky průřezu nosníku (na střednici). Síla F působí na polovině nosníku, ve středu výšky průřezu. Velikost síly F je nastavena parametricky, měnit se bude podle vztahu 3.18. Jelikož využíváme symetrie a modelujeme pouze polovinu nosníku, tak zatěžující síla bude poloviční oproti té, co nám z tohoto vztahu vyjde. Při

těchto okrajových podmínkách budou v místě vazeb a zatížení vznikat singularity, proto je potřeba vyšetřit napjatost od vazeb a zatížení dostatečně daleko.

Při snaze přiblížit se, co nejvíce reálnému stavu zatížení a reálným okrajovým podmínkám, je nejprve potřeba zatížení osamělou silou F nahradit tlakovým zatížením p , které bude k původní osamělé síle F staticky ekvivaletní. Jsou dvě možnosti, jak nosník reálně zatížit (Obr. 3.12 a Obr. 3.13)



Obr. 3.12: Reálné zatížení nosníku (MODEL 2)



Obr. 3.13: Reálné zatížení nosníku (MODEL 3)

Hodnota tlaku je nastavena parametricky. Maximální tlak p_{max} bude při délce nejmenší délce nosníku $l = 2h$ a potom se bude se vzrůstající délkou nosníku l pro zachování konstantní bezpečnosti na ohyb zmenšovat. Tlak p bude působit na stále stejně velké plošce S , kterou je potřeba určit. Velikost plošky ve směru osy y je v obou případech daná z geometrie nosníku, velikost plošky ve směru x je potřeba spočítat. Víme, že maximální síla F (a tím maximální tlak p_{max}) bude působit při délce nosníku $l = 2h$, které odpovídá i zatěžující síla F ze vztahu 3.18 (zde tedy polovina původní zatěžující síly). Aby nedošlo vlivem zatěžujícího tlaku p k otlacení nosníku, tak maximální tlak nesmí překročit dovolené napětí zde zachováme bezpečnost $k = 1,5$ a můžeme tedy psát

$$\frac{R_e}{k} = p_{max} = \frac{F}{S} \quad (3.26)$$

pro MODEL 1 platí

$$\frac{R_e}{k} = \frac{\frac{F}{2}}{\frac{b}{2}x_1} \quad (3.27)$$

Z rovnice 3.27 vyjádříme velikost plošky ve směru osy x

$$x_1 = \frac{Fk}{R_e b} \quad (3.28)$$

V druhém případě (MODEL 3) je šířka plochy menší o polovinu šířky stojiny t_w , délka plošky ve směru osy x bude tedy větší

$$x_2 = \frac{Fk}{R_e(b - t_w)} \quad (3.29)$$

Zatížení p se bude v závislosti na délce l měnit podle rovnice 3.30

$$p = \frac{\frac{4R_e I_y}{kh}}{S} \frac{1}{l} \quad (3.30)$$

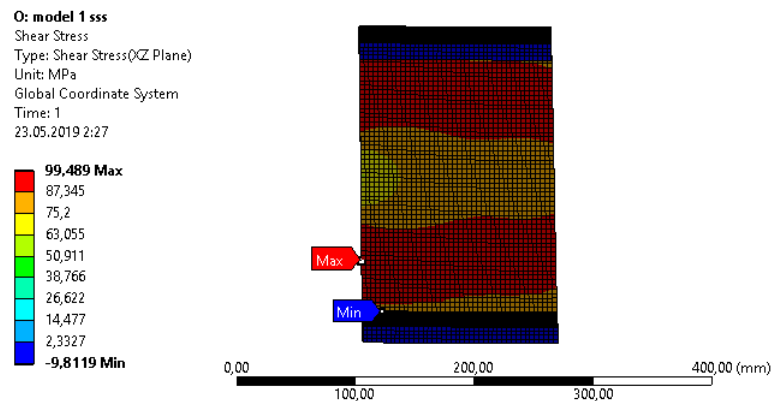
Plošky S jsou v obou případech stejné, určíme ji například z MODELu 1.

$$S = x_1 \frac{b}{2} \quad (3.31)$$

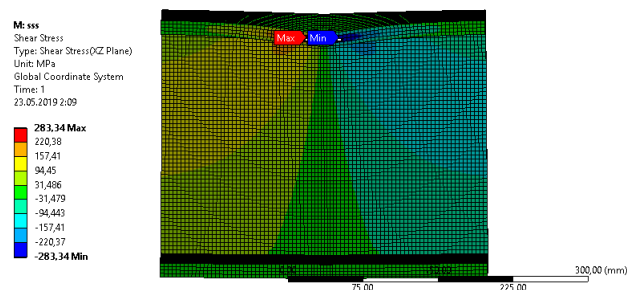
Posuvy jsou zamezeny na krajích zespodu nosníku po šířce průřezu, jak je zobrazeno na obrázcích 3.12 a 3.13. V těchto místech budou vznikat singularity, proto je opět nutné vyšetřit napjatost dostatečně daleko od vazeb.

3.2.5 Rozložení smykových napětí

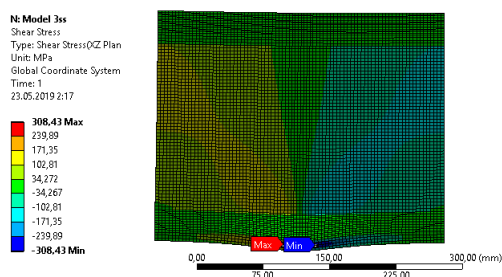
V kapitole 3.1.4 bylo vykresleno teoretické rozložení smykových napětí τ_{xz} podle Žuravského vztahu pro délku nosníku $l = 2.5h$. Pro tuto délku vykreslíme i smyková napětí τ_{xz} za použití metody konečných prvků, pro všechny tři modely. Pro MODEL 1 je smykové napětí τ_{xz} zobrazeno na Obr. 3.14, pro MODEL 2 na Obr. 3.15 a pro MODEL 3 na Obr. 3.16, modely zde však nejsou zobrazeny v celé délce $l = 2,5h$, u MODELu 1 je zobrazena část modelu mezi zatížením a vazbou, u MODELu 2 a 3 je z každé strany "uříznuta" 1/4 celkové délky, proto aby výsledek nezkreslovaly singularity, z obrázků je vidět, že velikost ani rozložení smykových napětí neodpovídají teoretickému rozložení podle Žuravského vztahu, u MODELu 2 a 3 je napjatost v jednotlivých průřezích silně ovlivňována přítomností tlakového zatížení a u MODELu 1 singularitou uprostřed, případně singularitami, u vazeb. Nejméně ovlivněný průřez je ten, který je nejdál od vazby a zatížení, tedy ten uprostřed mezi nimi. Po výšce tohoto průřezu vykreslíme průběh smykového napětí τ_{xz} (Obr.3.17).



Obr. 3.14: Rozložení smykového napětí τ_{xz} v MODELU 1

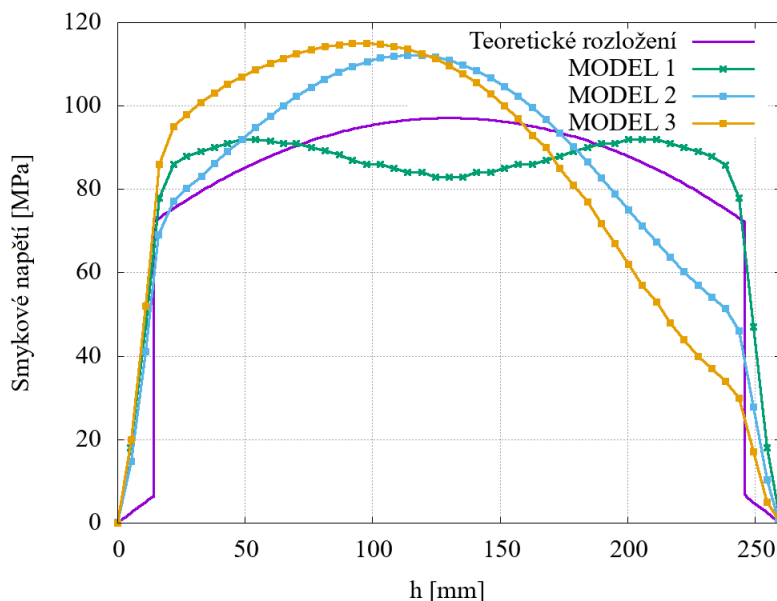


Obr. 3.15: Rozložení smykového napětí τ_{xz} v MODELU 2

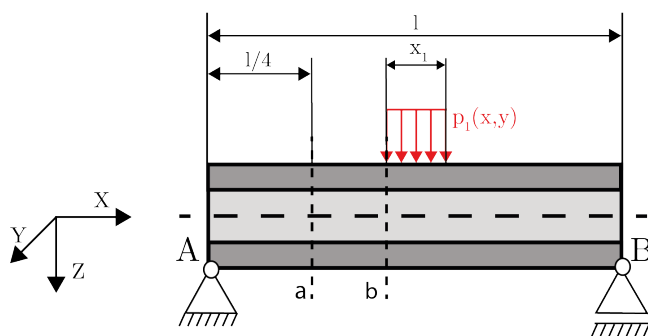


Obr. 3.16: Rozložení smykového napětí τ_{xz} v MODELU 3

Nyní budeme měnit délku nosníku l a podle toho i zatížení (pro MODEL 1 podle vztahu 3.18, a pro MODEL 2 a MODEL 3 podle vztahu 3.30). Sledovat budeme velikost maximálního smykového napětí τ_{xz} na průřezu uprostřed mezi vazbou a zatížením (u všech modelů), tento průřez označíme jako a a potom na průřezu přímo u zatížení, kde je maximální smykové napětí na celém nosníku(u MODELu 2 a 3). Tento průřez označíme jako b . Průřezy a a b jsou pro MODEL 2 znázorněny na Obr. 3.18.



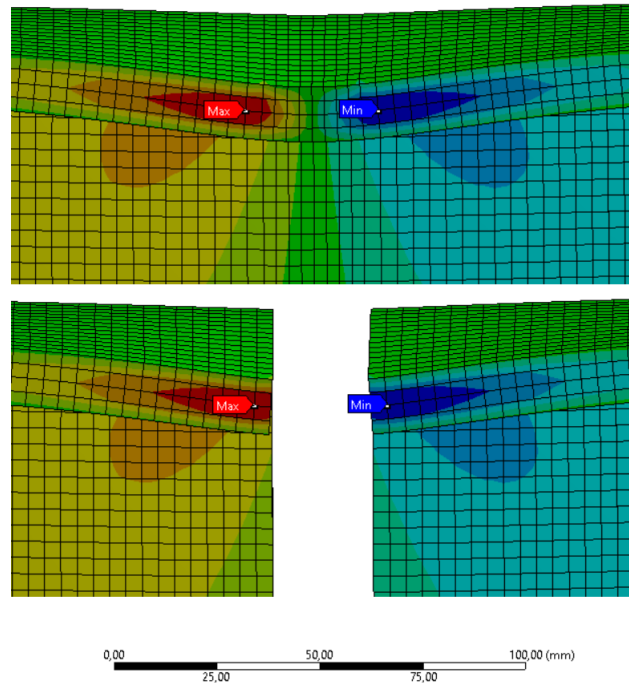
Obr. 3.17: Rozložení smykového napětí τ_{xz} podél výšky průřezu pro nosníku délky $l = 2.5h$



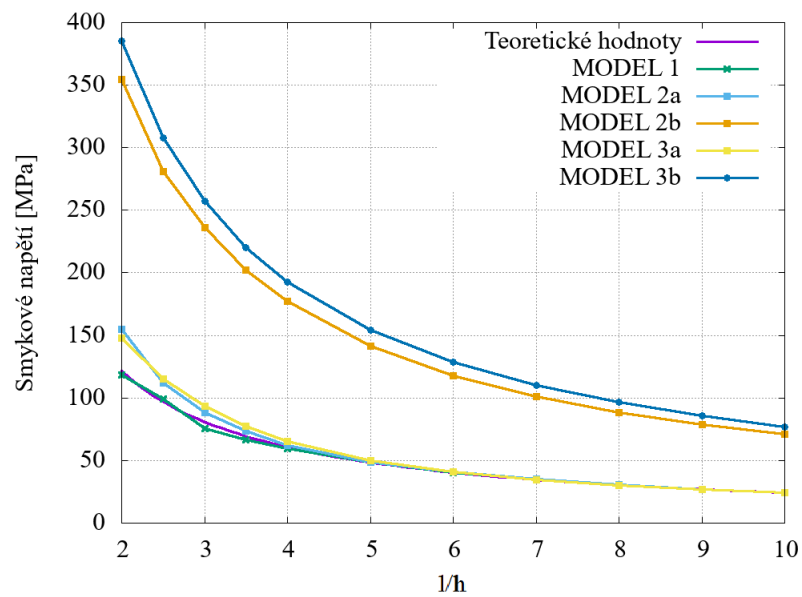
Obr. 3.18: Značení sledovaných průřezů pro MODEL 1

Nutno podotknout, že průřez b není přesně na hranici plochy, na kterou působí tlakové zatížení. Teoreticky by místo, kde působí největší smykové napětí, mělo být k hranici tlakového zatížení nekonečně blízko. Modely nosníku však nejsou spojité, ale jsou rozděleny na konečný počet prvků, proto průřez, na kterém je maximální smykové napětí, bude vzdálený 1 nod od hranice plochy, na kterou působí tlak p . Zobrazeno je to na Obr. 3.19, kde je na horním obrázku detail rozložení smykových napětí z Obr. 3.15 a dole je stejný detail, ze kterého je odebrána ta část nosníku, na kterou přímo působí tlak p . Vykreslení maximálních smykových napětí v obou průřezích τ_{xz} v závislosti na délce nosníku, při zachování bezpečnosti na ohyb je v grafu na Obr. 3.20.

Z grafu na Obr. 3.20 lze vyčíst, že hodnoty smykového napětí τ_{xz} jsou v průřezu b úplně jiné, než předpovídá teorie a z Obr. 3.15 3.16 je zřejmé, že i rozložení je jiné.



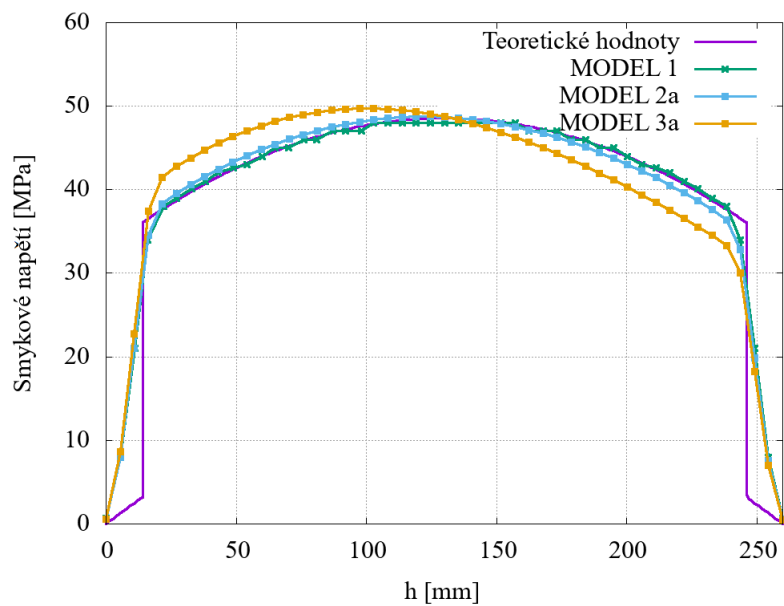
Obr. 3.19: Detail na rozložení smykových napětí u MODELu 1 z Obr. 3.15



Obr. 3.20: Závislost maximálních smykových napětí τ_{xz} na délce nosníku při zachování konstantní bezpečnosti na ohyb

Pokud budeme sledovat napětí v průřezu a , tak vidíme, že hodnoty maximálního smykového napětí τ_{xz} se začínají s teoretickou předpovědí scházet přibližně pro délku nosníku $l = 5h$ (a jí odpovídající zatížení při zachování konstantní bezpečnosti na

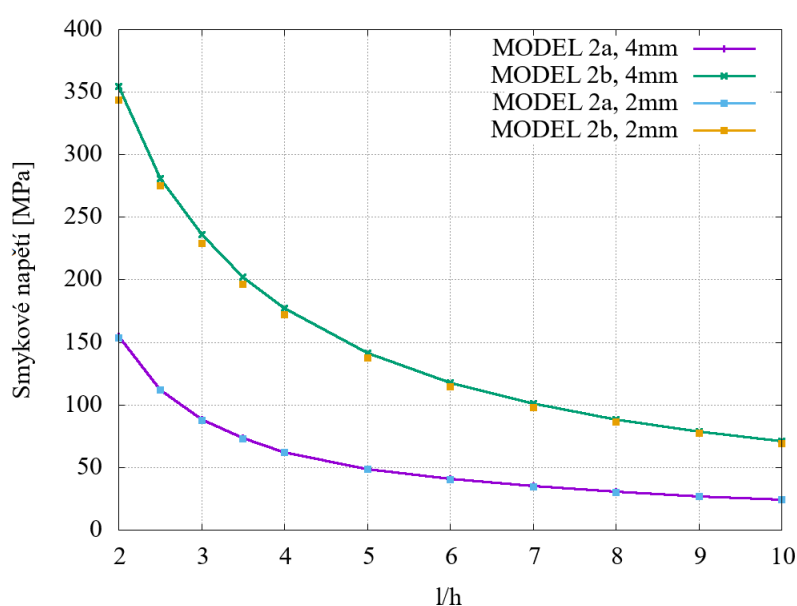
ohyb). Rozložení smykových napětí podél výšky průřezu b pro délku $l = 5h$ je v grafu na Obr. 3.21.



Obr. 3.21: Rozložení smykových napětí τ_{xz} po příčných průřezích, pro délku nosníku $l = 5h$

3.2.6 Posouzení hustoty konečnoprvkové sítě

Je potřeba ověřit, jestli byla zvolená velikost prvku dostatečně malá na to, aby se výsledky dosažené pomocí metody konečných prvků, daly považovat za věrohodné. Vezmeme například MODEL 1. U tohoto modelu snížíme velikost prvku ze 4 mm na 2 mm. Budeme opět měnit délku nosníku a zatížení tak, jak bylo popsáno v předchozích kapitolách a sledovat maximální smykové napětí na průřezích a a b . Výsledky porovnáme s výsledky při použití prvku o velikosti 4 mm (Obr. 3.22). Vidíme, že výsledky jsou téměř totožné, největší chyba je hned při délce $l = 2h$ v průřezu b a to 2.9%, což je dostatečně malá chyba na to, aby se daly výsledky z metody konečných prvků při použití modelu s velikostí prvku 4 mm považovat za věrohodné.



Obr. 3.22: Závislost maximálního smykového napětí τ_{xz} v průřezích a a b na poměru l/h , při zachování konstantní bezpečnosti na ohyb, pro velikost prvku 4 mm a 2 mm

4 Vyhodnocení výsledků

Poslední kapitola se věnuje vyhodnocení výsledků dosažených analytickým řešením a metodou konečných prvků.

Z Obr. 3.15 a 3.16 a grafu na Obr. 3.20, je vidět, že pokud budeme vyšetřovat napjatost příliš blízko zatížení, tak nemá smysl používat Žuravského vztah, protože rozložení i maximální velikost smykového napětí τ_{xz} bude úplně jiné než předpovídá teorie. Žuravský vztah předpovídá maximální smykové napětí výrazně menší, proto by mohlo při spoléhání se na Žuravského vztah dojít k plastické deformaci nebo porušení nosníku. Na průřezu, který je nejméně ovlivněný přítomností zatížení (tedy průřez a) je při délce nosníku $l = 2,5$ (a tomu odpovídající zatížení)(3.17) teoretické maximální napětí $\tau_{xz} = 98,97 MPa$. Pokud bychom nosník zatížili a zavazbili podle MODELu 1, tak by byla teoretická předpověď s chybou 7%, pro MODEL 2 je chyba 13,36% a pro MODEL 3 je chyba 16,15%, s čímž je nutné při volbě součinitele bezpečnosti počítat.

Velmi dobré předpovědi o rozložení smykového napětí τ_{xz} a jeho maximální hodnoty dává Žuravského vztah u nosníků, které jsou délky minimálně $l = 5h$ (3.21) (tedy při vyšetřování napjatosti dostatečně daleko od zatížení a vazeb). Teoretické maximální smykové napětí pro délku $l = 5h$ je $\tau_{xz} = 48,55 MPa$. Pokud nosník zatížíme podle MODELu 1 a 2, tak je hodnota maximálního smykového napětí τ_{xz} totožná s teoretickou předpovědí. U MODELu 3 je chyba 2,4%.

5 Závěr

Cílem této práce bylo provést rešerši nepřeností, kterých se dopouštíme při používání Žuravského vztahu. Dále pro vybraný příčný průřez provést analytický výpočet rozložení smykových napětí a potom výsledek porovnat s výsledky dosaženými pomocí metody konečných prvků. Následně výsledky vyhodnotit.

Rešerše nepřesností byla provedena v první části této práce, dále byly v rešeršní části uvedeny i přesnější teorie pro výpočet ohybu, než je prostá teorie. Druhá část byla věnována výpočtům. Nejdříve byl analytický, kde byl nosník považován za prutové těleso a potom numerický, který by proveden za použití metody konečných prvků a výpočetního software ANSYS. V MKP byly nasimulovány celkem tři různé modely s různými okrajovými podmínkami a zatížením, a to jednak vyplývající z prutových předpokladů a jednak ty, které se blíží reálnému případu. Následně byla posouzena hustota konečnoprvkové sítě a to tak, že se u jednoho výpočtového modelu zjemnila hustota sítě a výsledky se porovaly s výsledky pro hrubší síť. Největší chyba zde byla zhruba 3%, proto se i hrubší síť dala považovat za dostatečně jemnou.

Na základě výpočtů bylo zjištěno, že Žuravského vztah dává dostatečně dobré výsledky o velikosti a rozložení smykových napětí τ_{xz} u nosníků, které mají délku zhruba pěti násobek svého výšky příčného průřezu (a u kterých vyšetřujeme napjatost dostatečně daleko od vazeb a zatížení). Pro kratší nosníky vztah podhodnotuje maximální smykové napětí o zhruba 10 - 20%, což by se mělo zohlednit při volbě součinitele bezpečnosti.

Literatura

- [1] JOURAWSKI, D.J. *Sur la résistance d'un corps prismatique*. Annales des Ponts et Chaussées Mémoires et Documents, 1856, 328-351
- [2] VRBKA, Jan. *PRUŽNOST A PEVNOST: Učební text* [online]. Brno, 2012 [cit. 2019-05-21]. Dostupné z: http://www.old.umt.fme.vutbr.cz/tprofant/_downloads/6cf34133d3d87adadfe463537e6648be/UMTMB-ucebni_text-PPI-def-130201.pdf
- [3] ŠMIŘÁK, Svatopluk. *Pružnost a plasticita I: pro distanční studium*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-720-4468-0.
- [4] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK a Jan VRBKA. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. 2. vyd. Brno: VUT, 1992. Učební texty vysokých škol (Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojní). ISBN 80-214-0468-X.
- [5] DOBROVOLNÝ, Bohumil. *Pružnost a pevnost. Díl 2, Ohyb, přetvárná práce, dynamická namáhání*. 2. vyd. Praha: Ústav pro učební pomůcky průmyslových a odborných škol, 1947. Konstruktor.
- [6] TIMOŠENKO, Stepan Prokof'jevič. *Pružnost a pevnost. Díl 1., Základní theorie a úkoly*. Praha: Technicko-vědecké vydavatelství, 1951. Dostupné také z: <http://www.digitalniknihovna.cz/mzk/uuid/uuid:ce854490-31a6-11e4-8f64-005056827e52>
- [7] LEVINSON, Mark. *A New Rectangular Beam Theory*. Journal of Sound and Vibration. 1981(71), 81-87. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(81\)90493-4](https://doi.org/10.1016/0022-460X(81)90493-4).
- [8] DVOŘÁČEK, Jan. *VÝPOČET DEFORMACE UZAVŘENÉHO ZAKŘIVENÉHO PRUTU*. Brno, 2016. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně.
- [9] CHAN, Kwoktung, Neil STEPHEN, Kenneth YOUNG a K.F LAI. *A new method to determine the shear coefficient of Timoshenko beam theory* Journal of Sound and Vibration. 2011, (330), 3488–3497.
- [10] I profily. *Karisítě-roxory-profilý* [online]. Tišnov: TRIMOT, 2015 [cit. 2019-05-14]. Dostupné z: <https://www.kari-site-roxory.cz/hutni-material/eshop/4-1-I-profilý>
- [11] ČSN EN 10025-2. Praha: Český normalizační institut, 2005.

- [12] NĚMEC, Jaroslav, Cyril HÖSCHL a Jan DVOŘÁK. *Pružnost a pevnost ve strojírenství*. 1. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1989. Technický průvodce (SNTL-Nakladatelství technické literatury). ISBN 80-030-0193-5.
- [13] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v Inženýrských výpočtech* [online]. Brno [cit. 2019-05-14]. Dostupné z: <http://www.umat.fme.vutbr.cz/images/opory/MKP>

Seznam obrázků

1.1	Přímý nosník zatížený osamělou silou uprostřed (vlevo) s příčným průřezem I (vpravo)	15
2.1	Přímý prut zatížený dvěma osamělými silami F_1 a F_2 (a), Symetrický příčný průřez prutu (b) a uvolněný prvek prutu Ω_1 (c)[2][3]	17
2.2	Elementární úsek prutu [3]	18
2.3	Průřezy s různými poměry b/h , zleva: $b/h = 4$, $b/h = 2$, $b/h = 1$, $b/h = 0,5$	20
2.4	Rozložení smykového napětí τ_{xz} po šířce průřezu pro různé poměry b/h ,	20
2.5	Vlevo - nezatížený nosník, vpravo - nosník zatížený osamělou silou F se zakreslenou deplanací příčného průřezu [6]	21
2.6	Nosník zatížený osamělou silou s konečnoprvkovou sítí o velikosti prvku 10 mm	22
2.7	Porovnání Levisovy, Timošenkovy a Prosté teorie pružnosti	23
2.8	Uvolněný prvek prutu podle Timošenkovy teorie [7]	24
2.9	Uvolněný prvek prutu podle Levinsovy teorie [7]	25
3.1	Úplné uvolnění vazeb	27
3.2	VVU podél střednice prutu	28
3.3	K výpočtu kvadratického momentu I profilu	29
3.4	Výpočet lineárního momentu průřezu	30
3.5	Závislost vypočteného maximálního smykového napětí τ_{xz} , Redukovaného napětí σ_{red} v těžišti příčného průřezu a Normálového napětí σ_x na povrchu na poměru délky nosníku l a výšky průřezu h při zachování konstantní bezpečnosti na ohyb a pro rozměry příčného průřezu z Tab. 3.1	32
3.6	Závislost bezpečností k na poměru l/h	32
3.7	Teoretické rozložení smykového napětí τ_{xz} podle Žuravského vztahu	33
3.8	Nebezpečné místo na průřezu	34
3.9	Prvek SOLID186 (Upraveno z[13])	35
3.10	Geometrie nosníku	36
3.11	Zatížení nosníku a okrajové podmínky vyplývající z prutových předpokladů (MODEL 1)	36
3.12	Reálné zatížení nosníku (MODEL 2)	37
3.13	Reálné zatížení nosníku (MODEL 3)	37
3.14	Rozložení smykového napětí τ_{xz} v MODELU 1	39
3.15	Rozložení smykového napětí τ_{xz} v MODELU 2	39
3.16	Rozložení smykového napětí τ_{xz} v MODELU 3	39

3.17	Rozložení smykového napětí τ_{xz} podél výšky průřezu pro nosníku délky $l = 2.5h$	40
3.18	Značení sledovaných průřezů pro MODEL 1	40
3.19	Detail na rozložení smykových napětí u MODELu 1 z Obr. 3.15 . . .	41
3.20	Závislost maximálních smykových napětí τ_{xz} na délce nosníku při za- chování konstantní bezpečnosti na ohyb	41
3.21	Rozložení smykových napětí τ_{xz} po příčných průřezech, pro délku nos- níku $l = 5h$	42
3.22	Závislost maximálního smykového napětí τ_{xz} v průřezech a a b na poměru l/h , při zachování konstantní bezpečnosti na ohyb, pro velikost prvku 4 mm a 2 mm	43

Seznam tabulek

3.1	Rozměry příčného průřezu	27
3.2	Materiálové charekteristiky oceli S235JR	27

Seznam symbolů, veličin a zkratek

F	Síla [N]
l	Délka nosníku [mm]
t	Tloušťka pásnice příčného průřezu tvaru I [mm]
t_w	Tloušťka stojiny průřezu tvaru I [mm]
h	Výška příčného průřezu [mm]
b	Šířka příčného průřezu [mm]
Ω	Prvek prutu
τ_{xz}	Smykové napětí v rovině xz [MPa]
T	Posouvající síla [N]
N	Výslednice normálového napětí [N]
M_y	Ohybový moment [Nmm]
σ_x	Normálové napětí [MPa]
ψ	Oddělená plocha příčného průřezu [mm ²]/Funkce popisující rotaci příčného průřezu
J_y	Kvadratický moment průřezu k ose y [mm ⁴]
$U_{y\psi}$	Linární moment oddělené části průřezu [mm ³]
E	Modul pružnosti v tahu [MPa]
G	Modul pružnosti ve smyku [MPa]
I	Kvadratický moment průřezu [mm ⁴]
A	Obsah plochy průřezu [mm ²]
ω	Funkce popisující průhyb neutrální plochy
κ	Smykový koeficient
μ	Poissonovo číslo
q	Liniové zatížení [Nm ⁻¹]
ψ	Funkce popisující deplanaci příčného průřezu
R_e	Mez kluzu [MPa]
S	Stupeň statické neurčitosti/Plocha [mm ²]
u	Počet neznámých parametrů
v	Počet použitelných podmínek statické rovnováhy
k	Bezpečnost
F_{max}	Maximální přípustné zatížení [N]
n	Poměr výšky délky nosníku a výšky příčného průřezu
σ_{red}	Redukované napětí
σ_d	Dovolené normálové napětí
p	tlak [MPa]
MKP	Metoda konečných prvků
VVÚ	Výsledné vnitřní účinky

